دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه مازندران

عنوان درس: آب های زیرزمینی پیشرفته

Advanced Groundwater

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی، فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

مدرس: دکتر محمود محمد رضاپور طبری

دانشیار گروه مهندسی عمران

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی

(قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی)

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی)

در حالت طبیعی، حرکت آب در آبخوان به صورت افقی می باشد و اصولاً در منطقه غیراشباع و یا از میان لایه هایی مانند لایه کم نفوذ، جهت جریان قائم (رو به پایین) می باشد. به طور کلی در یک محیط متخلخل آب از نقاط با انرژی بیشتر به سمت نقاط با انرژی کمتر حرکت می کند.

جریان ورقه ای و متلاطم (Laminar and Turbulent flow)

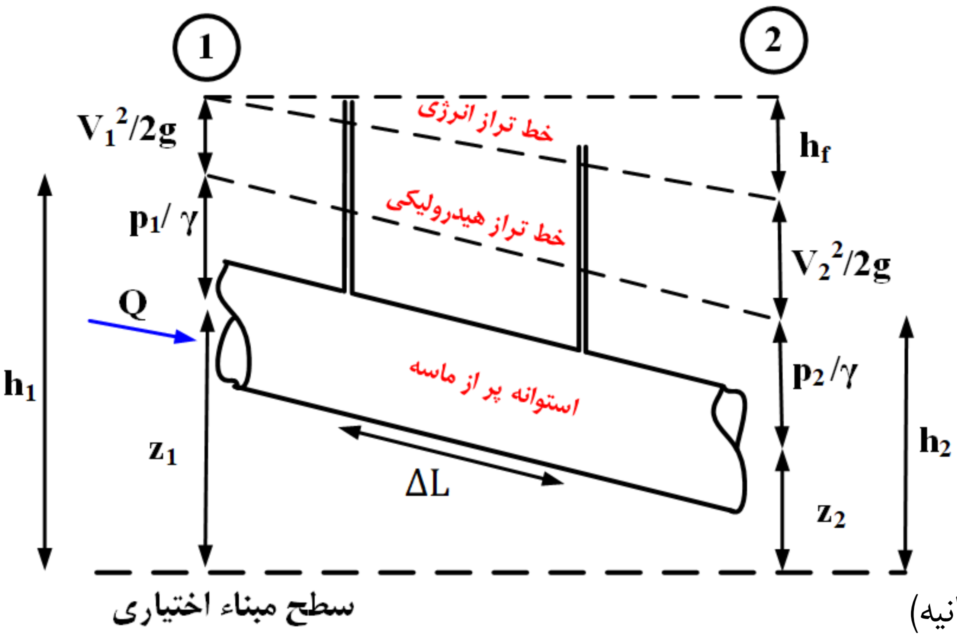
در جریان ورقه ای هر ذره سیال مسیر معینی را طی می کند و در جریان متلاطم، مسیر ذرات نامنظم بوده و آرایش مشخصی ندارند. در جریان ورقه ای سرعت کم و در جریان متلاطم سرعت بالا می باشد که به دلیل ارتباط بین افت انرژی با سرعت $(h_f \propto V^n)$ است. n در جریان ورقه ای برابر با یک و در جریان متلاطم بین ۱/۷۹ تا ۲ است. جهت تعیین ورقه ای یا متلاطم بودن جریان از شاخص عدد رینولدز استفاده می شود.

جریان پایدار و ناپایدار (Steady and Unsteady flow)

اگر در نقطه ای معین از جریان، مشخصات جریان در تمامی زمان ها ثابت باشد، جریان پایدار است. به عنوان مثال، عدم تغییر تراز سطح آب زیرزمینی بیانگر پایداری آبخوان است. اما اگر به دلیل عوامل طبیعی و یا مصنوعی (تغذیه آبخوان توسط باران، تغذیه مصنوعی آبخوان، برداشت آب از آبخوان توسط چاه های بهره برداری، تبخیر از سطح آب زیرزمینی) شرایط پایدار وجود نداشته باشد، مشخصات جریان با زمان تغییر کرده و شرایط ناپایدار می شود. از دید عملی، شرایط پایدار در آبخوان زمانی حاصل می شود که میزان برداشت با میزان تغذیه برابر باشد و یا تغییرات معنی دار در تراز سطح آب زیرزمینی رخ ندهد.

معادله برنولی و بار هیدرولیکی

جهت بررسی رابطه انرژی و تعریف بار هیدرلیکی، استوانه پر از ماسه ای را مطابق شکل زیر در نظر می گیریم. دو مانومتر (Manometer)، که دارای سطح مقطع کوچک می باشند، جهت اندازه گیری بار فشار در ابتدا و انتهای استوانه نصب می شوند. با فرض پایدار بودن جریان و عدم تراکم پذیری سیال، رابطه انرژی بین دو مقطع ۱ و ۲ به صورت زیر خواهد بود:



فشار متوسط در مقطع ۱ و ۲ (N/m^2)

$$\frac{V_1^{\,2}}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - h_f = \frac{V_2^{\,2}}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

افت انرژی بین مقاطع ۱ و ۲ $(N.m/N)$

سرعت متوسط آب در مقطع ۱ (متر بر ثانیه)

این رابطه برای سیال حقیقی (با منظور نمودن نیروهای لزجت) ارائه شده است. با توجه به اندک بودن بار سرعت در محیط های متخلخل، از این پارامتر در رابطه انرژی صرفنظر می شود، لذا:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - h_f = z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

طبق تعریف به $Z + P/\gamma$ بار پیزومتری (بار هیدرولیکی) گفته می شود.

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی)

$$h(x,y,t) = Z + P/\gamma$$

اگر طرفین رابطه مقابل را بر ΔL (طول نمونه) تقسیم نمائیم، خواهیم داشت:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - h_f = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \Rightarrow h_1 - h_2 = h_f$$

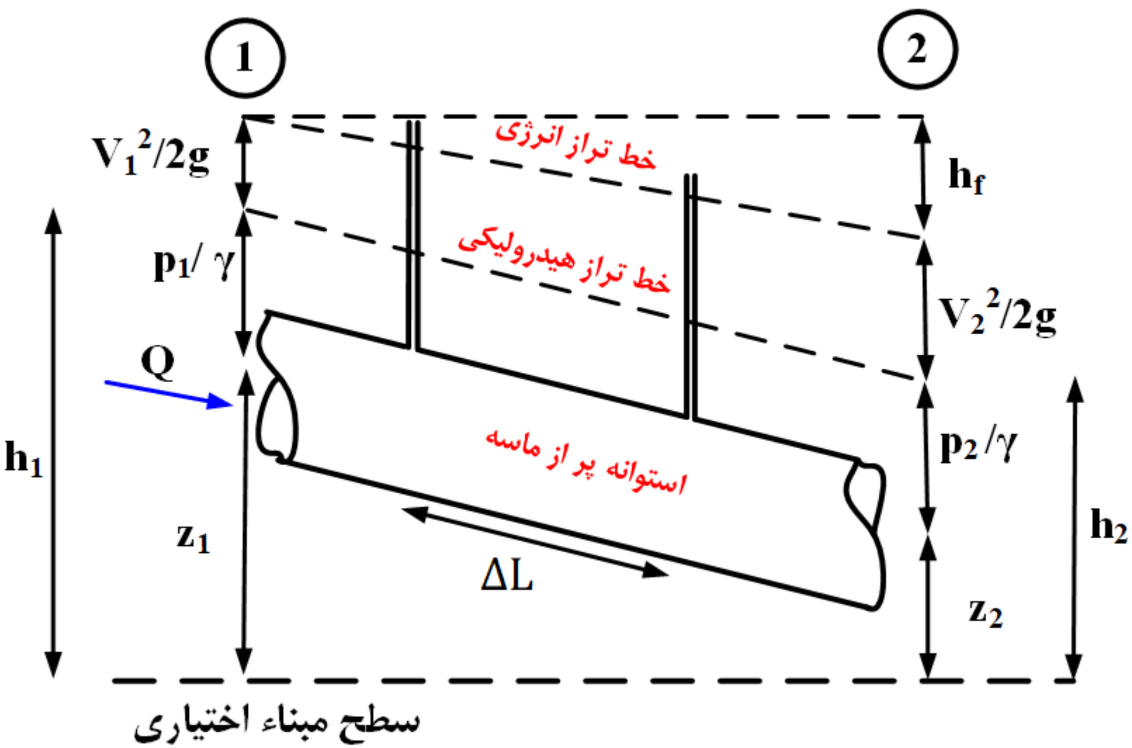
$$\Delta h = h_f \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{h_f}{\Delta L}$$

این رابطه نشان می دهد که شیب هیدرولیکی $(\frac{\Delta h}{\Delta L})$ با شیب خط انرژی $(\frac{h_f}{\Delta L})$ با هم برابرند.

شیب هیدرولیکی در طول ΔL:

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L} \Rightarrow \mathrm{i} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}L}$$

شیب هیدرولیکی در یک نقطه



قانون دارسی (Darcy Law)

بیش از یکصد سال پیش هنری دارسی، مهندس هیدرولیک فرانسوی، تحقیقاتی را در مورد جریان آب در یک لایه افقی ماسه‌ای که جهت تصفیه استفاده می‌شد، انجام داد. اولین بار روابط نظری جریان ورقه ای در داخل لوله های معین توسط هگن (G. Hagen) در سال ۱۸۳۹ و پوازویل (J.M.Poiseuile) در سال ۱۸۴۰ وضع گردید.

این محققان دریافتند که شدت جریان در داخل این لوله ها با شیب هیدرولیکی تغییر می کند. در سال ۱۸۵۶ هنری دارسی با انجام آزمایشاتی مشاهده کرد که سرعت جریان (شدت جریان) در یک محیط متخلخل با شیب هیدرولیکی متناسب است. همچنین با آزمایش های گوناگون که در آن ها شدت جریان تغییر یافته و یا نوع ماسه درون استوانه (نوع فیلتر) تغییر یافته مشخص گردید که می توان رابطه زیر را برای جریان در یک محیط متخلخل ارائه نمود (رابطه دارسی):

$$\frac{\forall}{A \times t} = \frac{Q}{A} = V = K\frac{h_1 - h_2}{\Delta L} = -K\frac{h_2 - h_1}{\Delta L} = -K\frac{\Delta h}{\Delta L}$$

در این رابطه $\forall$، حجم آب عبوری از ستون ماسه ای در زمان t می باشد. همچنین K، هدایت هیدرولیکی مواد تشکیل دهنده خاک درون ستون استوانه ای است. V: سرعت دارسی با حجم آب عبوری از واحد سطح در واحد زمان یا دبی ویژه نامیده می شود. K: ضریب تناسب یا هدایت هیدرولیکی یا ضریب نفوذپذیری (Coefficient of permeability) است. علامت منفی در سمت راست به این علت است که جهت مثبت جریان در جهت کاهش بار هیدرولیکی است.

قانون دارسی (Darcy Law)

$$V = -K\frac{\Delta h}{\Delta L}$$

این رابطه که سرعت جریان در یک محیط متخلخل رابطه مستقیم با افت بار آبی و رابطه غیرمستقیم با طول جریان دارد به نام قانون دارسی معروف است. این قانون بیش از هر نوآوری دیگر در حال حاضر پایه دانش جریان آب زیرزمینی می‌باشد. بطوریکه تحلیل‌ها و آنالیز تمامی مسائل مربوط به حرکت آب‌های زیرزمینی و هیدرولیک چاه بعد از تحقیقات دارسی آغاز گردید.

رابطه دارسی معادله اساسی حرکت سیالات در محیط های متخلخل است. سرعت دارسی را سرعت ظاهری یا سرعت متوسط (Apparent or average velocity) نیز می گویند. سرعت متوسط، سرعتی است که جریان با آن سرعت از تمام نقاط سطح مقطع محیط متخلخل (مشتمل بر ذرات جامد و منافذ) می گذرد.

قانون دارسی یک رابطه توده ای یا ماکروسکوپی (Macroscopic formula) است و در مورد رفتار ریز یا میکروسکوپی (Microscopic behavior) منافذ محیط متخلخل اطلاعاتی را ارائه نمی دهد (به دلیل پیچیده بودن محیط متخلخل). در توصیف ماکروسکوپی بودن جریان، متوسط تغییرات میکروسکوپی متغییرهایی مانند سرعت، فشار، جرم مخصوص و ... را در یک جزء کوچک از محیط متخلخل به نام جزء حجمی معرف (REV) (Representative volume element) بکار می برند.

قانون دارسی (Darcy Law)

$$V = -K\frac{\Delta h}{\Delta L}$$

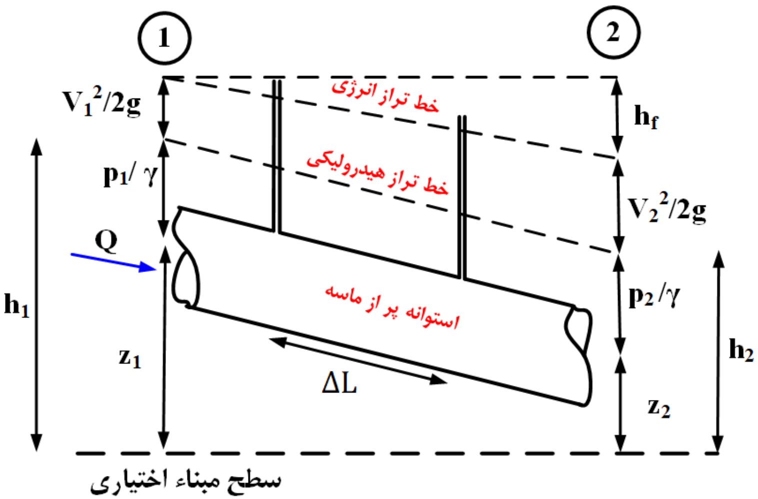
این جزء حجمی باید به اندازه کافی دارای منفذ و مجرا باشد تا بتواند مقادیر متوسط قابل اعتماد برای متغییرهای میکروسکوپی را ارائه دهد. در واقع جزء حجمی معرف یک نقطه فیزیکی است که مقادیر متوسط مشخصات محیط متخلخل و متغییرهای هیدرولیکی برای آن بکار برده می شود.

قانون دارسی توسط فیزیک دانان خاک، مهندسان کشاورزی و متخصصان مکانیک خاک برای جریان رطوبت و هوا در خاک مورد استفاده قرار می گیرد. این قانون جریان های نفت و گاز در تشکیلات عمیق زمین شناسی را توصیف می کند و لذا توسط تحلیل گران مخازن نفت نیز بکار می رود.

در رابطه دارسی h، بار هیدرولیکی (بار پیزومتری) است و کمیتی اسکالر است که منفی گرادیان آن $\left(-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}L}\right)$ یک بردار می باشد. این بردار بیانگر نیرویی است که بر واحد وزن سیال اعمال می شود و باعث حرکت آن می گردد. با توجه به اینکه منفی گرادیان بار هیدرولیکی، نیرو است لذا می توان بار هیدرولیکی را به عنوان یک پتانسیل نیرو که مفهوم فیزیکی آن انرژی در واحد وزن سیال است، در نظر گرفت.

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی)

مثال) مطابق شکل زیر، مقادیر Z_1 ، Z_1 و بارهای فشار در مقاطع ۱ و ۲ به ترتیب برابر با ۵۰، ۲۰، ۴۰ و ۶۰ سانتیمتر است. اگر هدایت هیدرولیکی مواد تشکیل دهنده نمونه خاک 3×10^{-4} سانتیمتر بر ثانیه و طول نمونه ۴۰ سانتیمتر باشد، مقدار دبی عبوری از داخل نمونه چقدر است؟ قطر نمونه ۸ سانتیمتر است.



حل) از رابطه دارسی برای تعیین سرعت و از رابطه پیوستگی برای محاسبه دبی عبوری جریان استفاده می شود:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} 8^2 = 50.24\ cm^2$$

بار هیدرولیکی در مقطع ۱ $h_1 = Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = 50 + 40 = 90\ cm$

بار هیدرولیکی در مقطع ۲ $h_2 = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} = 20 + 60 = 80\ cm$

شیب هیدرولیکی $\frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta L} = \frac{90 - 80}{40} = 0.25$

$$Q = AV = 50.24 cm^2 \times 0.75 \times 10^{-4} \frac{cm}{s} = 3.768 \times 10^{-3} cm/s$$

سرعت دارسی $V = K \frac{\Delta h}{\Delta L} = (3 \times 10^{-4}\ cm/s) \times 0.25 = 0.75 \times 10^{-4}\ cm/s$

سرعت دارسی و سرعت حقیقی

سرعتی که در رابطه دارسی ارائه می شود بر این فرض استوار است که جریان از تمام نقاط واقع در سطح مقطع ستون استوانه بدون توجه به ذرات جامد در آن عبور می کند و این سرعت یک سرعت فرضی است که بیانگر سرعت متوسط جریان در جهت کاهش بار هیدرولیکی است.

به عبارت دیگر سرعت دارسی یک شار (Flux) توده ای یا ماکروسکوپی است. در مقیاس میکروسکوپی، آب فقط در داخل خلل و فرج با سرعتی بنام سرعت منفذی (Pore velocity) با سرعت حقیقی (Actual velocity) یا سرعت تراوش (Seepage velocity) جریان دارد.

به دلایل زیر سرعت حقیقی از سرعت دارسی بیشتر است:

- به علت پیچ و خم های مجاری عبور آب در محیط متخلخل (شرایط واقعی)، آب باید مسافت بیشتری را طی کند.
- آب تنها از منافذ مؤثر (منافذ پیوسته) سطح مقطع جریان خارج می شود و لذا سطح مقطع حقیقی جریان از سطح مقطع کلی آن کمتر می باشد.

سرعت دارسی و سرعت حقیقی

در یک خاک همگن، تخلخل مؤثر (n_e):

$$n_e = \frac{A_e}{A}$$

در این رابطه A_e، سطح منافذ مؤثر در سطح مقطع کلی A است.

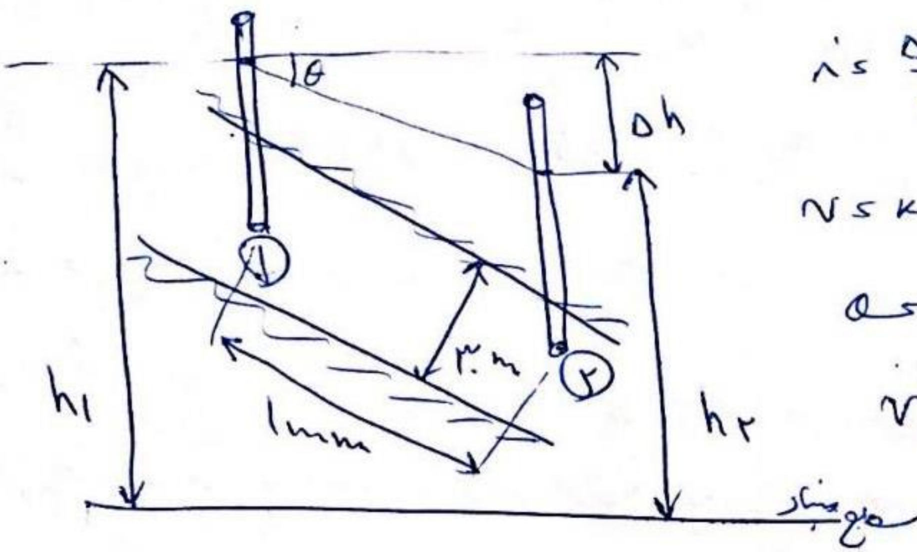
$$V_r = \frac{V}{n_e} \quad \left(Q = A_e V_r = AV \Rightarrow V_r = V/(A_e/A) = \frac{V}{n_e}\right)$$

در این رابطه V، سرعت دارسی و V_r سرعت واقعی عبور جریان از میان ذرات است.

جهت تعیین سرعت واقعی جریان بایستی در مقیاس میکروسکوپی، نمونه را بررسی کرد. به عنوان مثال در جریان آب از ماسه، فضاهای خالی بطور پیوسته با توجه به موقعیت آن در داخل محیط متخلل تغییر می‌کند. این بدان معنی است که سرعت واقعی غیریکنواخت و دارای افزایش و کاهش سرعت قابل توجه و تغییر در جهت می‌باشد. بنابراین سرعت واقعی به موقعیت یک نقطه در محیط بستگی دارد.

برای مواد طبیعی زمین، ساختار میکرسکوپی را نمی‌توان در سه جهت مشخص کرد، از این رو سرعت‌های واقعی به صورت آماری تعیین می‌شوند.

مثال) در شکل زیر یک آبخوان تحت فشار که از ناحیه ای تغذیه می شود، نشان داده شده است. هدایت هیدرولیکی مواد آبخوان ۴۰ متر در روز و تخلخل مؤثر آن ها ۰/۲۵ است. بار پیزومتری در دو پیزومتر که به فاصله ۱۰۰۰ متر از همدیگر حفر شده اند به ترتیب ۵۲ و ۴۷ متر است. ضخامت متوسط آبخوان ۳۰ متر و عرض آن ۴۰ کیلومتر است. مقدار دبی جریان آب در آبخوان چقدر است؟ زمان لازم برای اینکه آب مسافت ۲ کیلومتر را در آبخوان طی کند را حساب کنید.



$i = \frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{52-47}{1000} = 0.005$

$V = Ki = 40 \times 0.005 = 0.2 \ \frac{m}{day}$

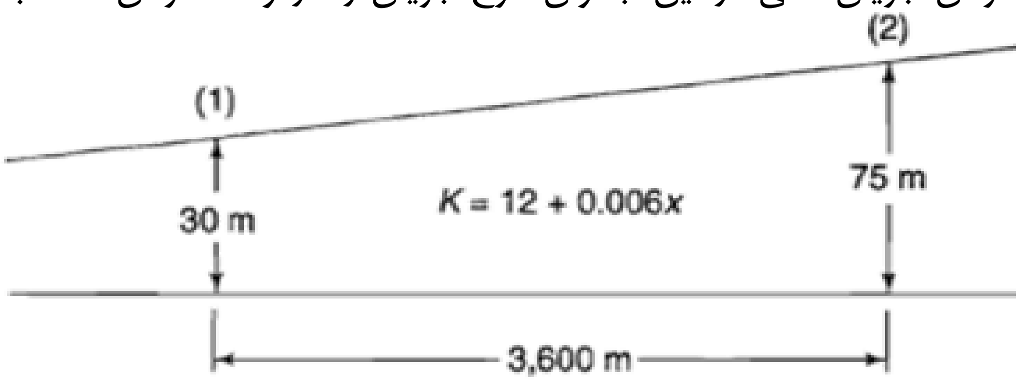
$Q = AV = (30 \times 40 \times 1000) \times 0.2 = 2.4 \times 10^5 \ \frac{m^3}{day}$

$V_a = \frac{V}{n_e} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8 \ \frac{m}{day}$

$t = \frac{x}{V_a} = \frac{2000m}{0.8} = 2500 \ day = 6.85$ (year)

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی)

مثال) یک آبخوان محصور افقی با ضخامت متغیر در شکل زیر نشان داده شده است. آبخوان ناهمگن بوده و هدایت هیدرولیکی آن در مقطع ۱ که $x = 0$ است، به صورت $K = 12 + 0.006x$ می باشد. سطح پیزومتریک در بالای لایه نامحصور و در مقاطع ۱ و ۲ به ترتیب برابر با ۱۴/۲ و ۱۸/۸ متر اندازه‌گیری شده است. با فرض جریان افقی در این آبخوان، نرخ جریان را در واحد عرض محاسبه نمائید.



قانون دارسی برای آبخوانی با ضخامت ثابت به صورت زیر است:

$$Q = -KA\frac{dh}{dl}$$

از آنجائیکه ضخامت آبخوان در این مسئله متغیر می‌باشد، لذا بایستی ضخامت سطح مقطع و گرادیان هیدرولیکی را بصورت تابعی از x درنظر گرفت. با فرض عرض واحد، $A = b_1 + \frac{(b_2-b_1)x}{L}$ که $L = 3600m$ و $b_1 = 30m$ و $b_2 = 75m$ بنابراین:

$$A = 30 + \frac{(75-30)x}{3600} = 30 + 0.0125x$$

با جایگذاری A و K در معادله دارسی، نرخ جریان Q به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = -(12 + 0.006x)(30 + 0.0125x)\frac{dh}{dx}$$

با خلاصه نمودن معادله فوق و انتگرال‌گیری آن از مقطع ۱ تا ۲:

$$\int_0^{3600} \frac{1}{(12+0.006x)(30+0.0125x)}dx = \int_{14.2}^{18.8} -\frac{1}{Q}dh$$

با تجزیه کسرها و انتگرال‌گیری از آنها می‌توان نوشت:

$$\int_0^{3600} \left[\frac{0.2}{(12+0.006x)} + \frac{0.416}{(30+0.0125x)}\right]dx = \int_{14.2}^{18.8} -\frac{1}{Q}dh$$

$$[33.333\, ln(12+0.006x) - 33.28\, ln(30+0.0125x)]_{x=0}^{x=3600} = -\frac{1}{Q}h]_{h_1=14.2}^{h_2=18.8}$$

$$-26.54 - (-30.36) = -\frac{1}{Q}(18.8-14.2)$$

$$Q = -1.20(m^3/day/m)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که جریان از سمت مقطع ۲ به سمت مقطع ۱ می‌باشد.

حدود اعتبار قانون دارسی

در استفاده از قانون دارسی باید در نظر داشت که این قانون برای شرایط مشخص اعتبار دارد. به دلیل اینکه سرعت در جریان‌های لایه‌ای یا ورقه‌ای، مانند جریان آب در یک لوله موئینگی، با توان اول گرادیان هیدرولیکی متناسب است، لذا کاربرد قانون دارسی در محیط متخلخل برای جریان لایه‌ای منطقی به نظر می‌رسد. برای جریان در لوله‌ها و مقاطع بزرگتر، با استفاده از عدد رینولدز که نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجی (گرانروی) است، جریان لایه‌ای از جریان متلاطم تشخیص داده می‌شود. از این‌رو عدد رینولدز جهت تعیین محدوده‌ای از جریان که توسط قانون دارسی بیان می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد. عدد رینولدز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N_R = \frac{\rho V D}{\mu}$$

ρ : چگالی سیال

V: سرعت

D: قطر لوله

μ: لزجت دینامیکی سیال

در محیط متخلخل از سرعت دارسی و قطر مؤثر ذرات (d_{10}) بجای V و D استفاده می‌شود. با توجه به اینکه اندازه‌گیری توزیع قطر خلل و فرج در یک محیط متخلخل بسیار پیچیده است لذا از قطر تخمینی ذرات، در تعیین نوع جریان استفاده می‌شود.

حدود اعتبار قانون دارسی

آزمایشات نشان می‌دهد که قانون دارسی برای $N_R < 1$ معتبر است و حد بالایی اعتبار قانون دارسی $N_R = 10$ می‌باشد. برای مقادیر عددی بالای یک، نیروهای اینرسی افزایش می‌یابد که نتیجه این امر متلاطم‌شدن جریان است. مسیرهای جریان نامنظم چرخشی و گردابی که در اثر جریان متلاطم ابتدا در حفرات بزرگ ایجاد می‌شوند با افزایش سرعت، در حفرات کوچکتر پخش می‌شوند. زمانی‌که جریان متلاطم بطور کامل توسعه می‌یابد، تغییرات افت بار آبی به طور تقریبی با توان دوم سرعت نسبت خطی دارد.

با توجه به اینکه در اغلب جریان‌های زیرزمینی طبیعی $N_R < 1$ است، لذا قانون دارسی کاربرد دارد. تخطی از قانون دارسی در مناطقی که شیب هیدرولیکی زیاد باشد همانند محل‌های نزدیک چاه پمپاژ، رخ می‌دهد. همچنین جریان آشفته می‌تواند در بعضی از سنگ‌ها از قبیل سنگ آهک و بازالت که دارای حفرات بزرگ زیرزمینی هستند، اتفاق بیافتد.

حدود اعتبار قانون دارسی

نکته: بررسی‌های صورت گرفته نشان می‌دهد که قانون دارسی برای جریان‌هایی با سرعت کم همانند عبور جریان از خاک‌های رسی سنگین معتبر نمی‌باشد. این امر بدلیل اثرات بارهای الکتریکی ذارت رسی بر روی آب موجود در منافذ بسیار ریز می‌باشد که منجر به ایجاد رابطه غیر خطی بین نرخ جریان و گرادیان هیدرولیکی می‌شود. لازم به ذکر است به دلیل بسیار کوچک بودن منافذ رس، لزجت آب در این حالت بیشتر از آب آزاد است و لذا تحت چنین شرایطی گرادیان هیدرولیکی ممکن است برای حرکت آب در محیط متخلخل کافی نباشد و بین سرعت جریان و گرادیان هیدرولیکی یک رابطه خطی برقرار نخواهد بود.

حدود اعتبار قانون دارسی

مثال) اطلاعات نمونه برداشت شده از آبخوان نشان می دهد که هدایت هیدرولیکی آن $23.54m/day$ با گرادیان هیدرولیکی 0.326 می باشد. متوسط اندازه ذرات این نمونه، $0.037cm$ و تخلخل 0.3 می‌باشد. این نمونه با آب خالص در $20°C$ مورد آزمایش قرار گرفته است. در این حالت سرعت دارسی، سرعت متوسط منفذی و میزان اعتبار قانون دارسی را بررسی نمایید.

سرعت دارسی با استفاده از زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{V} = -K\frac{dh}{dl} = -(23.54m/day)(-0.326) = 7.67m/day$$

سرعت متوسط منفذی با استفاده تخلخل و بر اساس رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\mathrm{V}_e = \frac{Q}{\alpha A} = \frac{\mathrm{V}}{\alpha} = \frac{7.67m/day}{0.3} = 25.6m/day$$

جهت تعیین اعتبار قانون دارسی لازم است بیشترین سرعتی که در آن قانون دارسی معتبر است از رابطه $N_R = \frac{\rho \mathrm{V} D}{\mu}$، بدست آید. برای آب در دمای $20°C$:

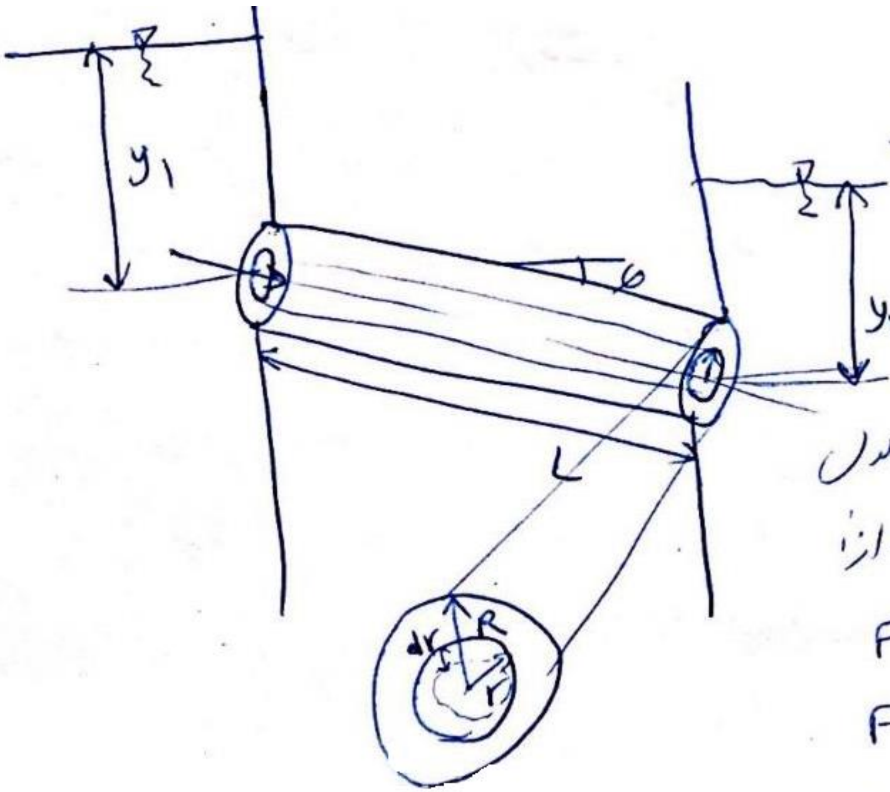
$\rho = 998.2kg/m^3$، $\mu = 1.005 \times 10^{-3}\mathrm{N.s}/m^2$ و $N_R = 1$ می‌باشد، لذا:

$$V_{max} = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{1.005 \times 10^{-3}kg/ms}{(998.2kg/m^3)(0.00037m)} = 0.00272\ m/s = 235\ m/day$$

بنابراین برای این مثال، قانون دارسی در سرعت‌های کمتر یا مساوی با $235m/day$ معتبر است.

معادله پوازویل و قانون دارسی

قانون دارسی به صورت تجربی وضع گردیده و تلاش های زیادی جهت استخراج رابطه دارسی با استفاده از روش های تحلیلی و اصول فیزیکی انجام شد که یکی از روش های نیمه تحلیلی، استفاده از قانون پوازویل برای جریان در داخل لوله های استوانه ای با انجام اصلاحاتی در آن می باشد.



جریان ورقه ای پایدار در داخل یک لوله ی استوانه ای

جریان ورقه ای در لوله ای بطول L با شعاع R که امتداد آن با افق زاویه θ می سازد جاری است. با رقوم های از مبنا تا سطح آزاد در ابتدا و انتهای لوله y_1 و y_2

در واقع این لوله استوانه ای از آب به شعاع اختیاری r و طول L انتخاب می شود. نیروهای وارد بر این استوانه عبارتند از:

نیروی فشار هیدرواستاتیک در ①

$$F_1 = P_1 A = \gamma y_1 (\pi r^2)$$

②

$$F_2 = P_2 A = \gamma y_2 (\pi r^2)$$

مولفه نیروی وزن در جهت حرکت

$$F_g = W \sin(\theta) = \gamma (\pi r^2) L \sin(\theta)$$

معادله پوازویل و قانون دارسی

$F_r = \tau \times (2\pi r L)$ نیروی مقاوم در مقابل حرکت به علت وجود تنش برشی τ

تعادل نیروها $F_1 - F_2 + F_g = F_r$ لزجت شوسی (چون جریان در کانال آرام است)

$$\Rightarrow \gamma \pi r^2 [(y_1 - y_2) + L\sin(\theta)] = -\mu \frac{dv}{dr}(2\pi r L)$$

$\frac{dv}{dr}$ شیب سرعت در جهت سطح استوانه و علامت منفی لازم است چون r از محور استوانه سمت خارج اندازه گیری می‌شود و با افزایش r، سرعت v کاهش می‌یابد. پس از انتگرال گیری و $r = R \Rightarrow v = 0$ (سرعت ذره چسبیده به دیواره لوله صفر است)

$$\Rightarrow v = \frac{\gamma}{4\mu}\left[\frac{(y_1 - y_2)}{L} + \sin(\theta)\right](R^2 - r^2)$$ معادله پوازویل

سرعت جریان (دبی لوله) $Q_c = \int_A v\, dA_c = \int_0^R (v)(2\pi r)dr = \frac{\gamma\pi}{8\mu}\left[\frac{(y_1 - y_2)}{L} + \sin(\theta)\right]R^4$

$$dA_c = \pi(r + \tfrac{1}{2}dr)^2 - \pi(r - \tfrac{1}{2}dr)^2 = 2\pi r\, dr$$

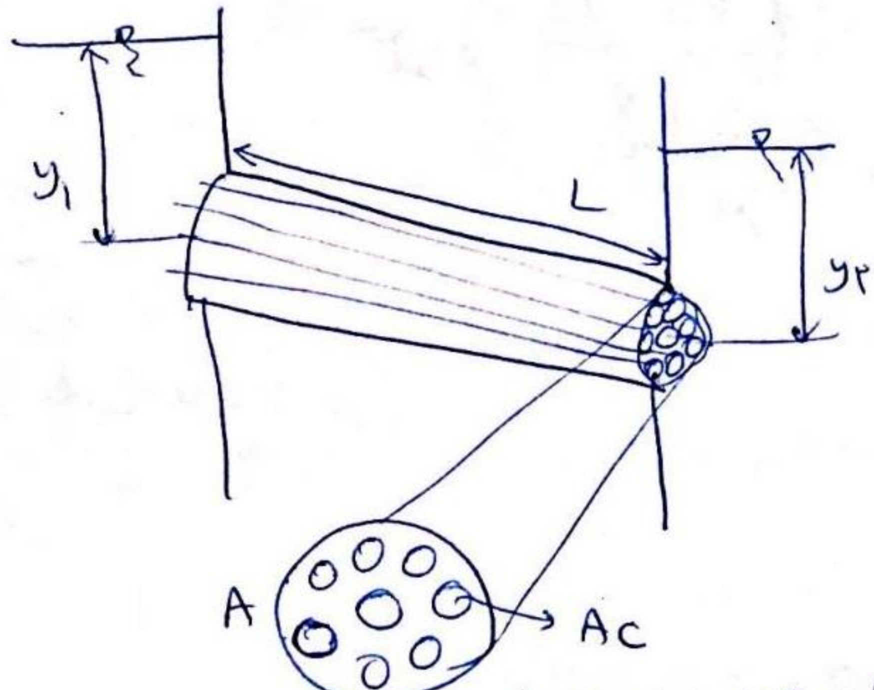
سرعت متوسط $V_c = \frac{Q_c}{A_c} = \frac{\gamma R^2}{8\mu}\left[\frac{(y_1 - y_2)}{L} + \sin(\theta)\right]$

$A_c = \pi R^2$

چون $\sin(\theta) = \frac{z_1 - z_2}{L}$ لذا $\frac{y_1 - y_2}{L} + \sin(\theta)$ شیب هیدرولیکی می‌باشد.

جریان ورقه ای پایدار در مجموعه ای از لوله های استوانه ای

محیط متخلخل ساده ای را که از اجتماع تعداد زیادی لوله به شعاع R و طول L به موازات هم تشکیل گردیده در نظر بگیرید. ارتفاع سطح آب در دو طرف ورودی و خروجی برای هر یک از لوله ها یکسان است. اگر تعداد این لوله ها m و دبی هر کدام Q_C باشد کل دبی محیط متخلخل (Q) از رابطه زیر بدست می آید:



$$Q = \frac{m\gamma\pi R^4}{8\mu}\left[\frac{(y_1-y_2)}{L}+\sin(\theta)\right]$$

$n = \frac{A_p}{A}$ کل سطح مقطع متخلخل

$A_p = mA_C$ سطح مقطع هر منفذ

$A_C = \pi R^2$

$$A = \frac{m\pi R^2}{n}$$

در محیط متخلخل سرعت متوسط $v = \frac{Q}{A} = \frac{n\gamma R^2}{8\mu}\left[\frac{(y_1-y_2)}{L}+\sin(\theta)\right]$

این معادله شباهت زیادی به معادله دارسی دارد زیرا:

$$\left[\frac{(y_1-y_2)}{L}+\sin(\theta)\right]=\left(\frac{(y_1-y_2)}{L}+\frac{z_1-z_2}{L}\right)=-\frac{(h_2-h_1)}{L}=-\frac{\Delta h}{L}$$

گرادیان هیدرولیکی

اگر $K_p=\frac{n\gamma R^2}{8\mu}$ هدایت هیدرولیکی $\Rightarrow V=-K_p\frac{\Delta h}{L}$

K و K_p دارای یک معنی می باشند و هر دو دارای بعد سرعت $[LT^{-1}]$ می باشند.

از معادله K_p مشخص می شود که K_p به صفات سیال (γ,μ) و محیط (n,R) بستگی دارد. اگر بخواهیم معادله استخراج شده که برای محیط متخلخل ایده ال استخراج شده برای یک محیط متخلخل حقیقی باشد تا کاربردی هم باشد باید آن را قدری اصلاح نمود. در محیط های متخلخل ایده ال و حقیقی γ و n و μ دارای یک معنی و مفهوم هستند ولی R در یک محیط حقیقی ثابت نیست و متغیر می باشد. برای در نظر گرفتن تغییرات R می توان بجای آن از $\beta_1 R_m$ استفاده نمود. R_m شعاع متوسط اندازه های خلل و فرج خاک و β_1 ضریب ثابتی است که جهت به حساب آوردن حدود تغییرات اندازه های خلل و فرج منظور شده است:

$$K=\frac{\gamma n\beta_1^2R^2}{8\mu}$$

برای محیط متخلخلی که از ذرات غیر چسبنده تشکیل شده می توان R_m را به قطر متوسط ذرات آن (d_m) با معرفی ضریب دیگری مانند β_2 ربط داد یعنی:

$$R_m=\frac{1}{2}\beta_2 d_m\Rightarrow K=\frac{\gamma n\beta_1^2\beta_2^2d_m^2}{32\mu}$$

در این معادله هنوز مدل دیگر محیط متخلخل مانند شکل ذرات، و جزئیات هندسی خلل و فرج تعلیل درجه پیچیدگی که جریان آب در محیط متخلخل را تحت تاثیر قرار می دهند منظور نشده است. بنابراین در نظر گرفتن این عوامل بر جریان آب، ضریب بدون بعد به نام β در رابطه K وارد می نماییم:

$$K = \frac{\gamma n \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 d_m^2}{32\mu}$$

$$\Rightarrow \text{if } \beta = \frac{\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3}{32} \Rightarrow K = \frac{\beta \gamma n d_m^2}{\mu}$$

بخش از این عوامل که به مشخصات محیط بستگی دارد را نفوذپذیری ذاتی (intrinsic permeability) می نامند و با k نشان می دهند

$$k = \beta n d_m^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{\gamma k}{\mu} = \frac{\rho g k}{\mu}$$

C ضریب بدون بعد است که برای یک محیط متخلخل مقدار آن بستگی به عوامل متغیر اندازه قطر ذرات مانند (لایه بندی)، آکندگی، میزان پیچیدگی، دانه بندی، آرایش دانه ها و تخلخل شکل دارد. لذا K تابعی از d_m و γ و μ است.

$$\text{if } C = \beta n \Rightarrow K = \frac{\gamma C d_m^2}{\mu}$$

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (قانون دارسی و کاربرد آن در حل مسائل جریان یک بعدی آب زیرزمینی)

بنابراین توانایی انتقال سیال در سنگ یا خاک، نفوذپذیری نامیده می‌شود. این خصوصیت تنها به محیط متخلخل بستگی دارد و مستقل از خصوصیات سیال می‌باشد.

$$k = \frac{K\mu}{\rho g}$$

K: هدایت هیدرولیکی، μ: لزجت دینامیکی، ρ: چگالی سیال و g: شتاب جاذبه

با جایگزینی رابطه سرعت دارسی در رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$k = -\frac{\mu V}{\rho g (dh/dl)}$$

واحد پارامترها عبارتند از:

$$k = -\frac{(kg/m\,s)(m/s)}{(kg/m^3)(m/s^2)(m/m)} = m^2$$

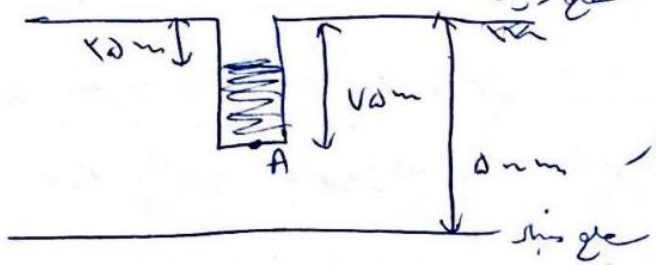
بنابراین نفوذپذیری ذاتی واحدی از سطح می‌باشد. به دلیل اینکه واحد k در این رابطه خیلی کوچک است، سازمان زمین‌شناسی آمریکا واحد k را بصورت میکرومترمربع ارائه نمود ($\mu m^2 = 10^{-12} m^2$).

معمولاً در آب زیرزمینی برای هدایت هیدرولیکی از واحد m/day استفاده می شود. واحدهای معمول برای نفوذپذیری ذاتی m^2، cm^2 و دارسی است. واحد دارسی که در مهندسی نفت کاربرد دارد برابر با $0.987 \times 10^{-8} cm^2$ است.

یک دارسی تراوایی سنگ است وقتی که بتواند در طی یک ثانیه اجازه عبور یک سانتیمتر مکعب از مایع با لزجت یک سانتی پواز را زمانی که گرادیان فشار یک اتمسفر باشد از سطح مقطع یک سانتیمتر مربعی بدهد.

$$1m/day = 3.28\, ft/day$$

مثال) در شکل زیر بار هیدرولیکی، بار فشار در ته پیزومتر (نقطه A) را تعیین کنید.

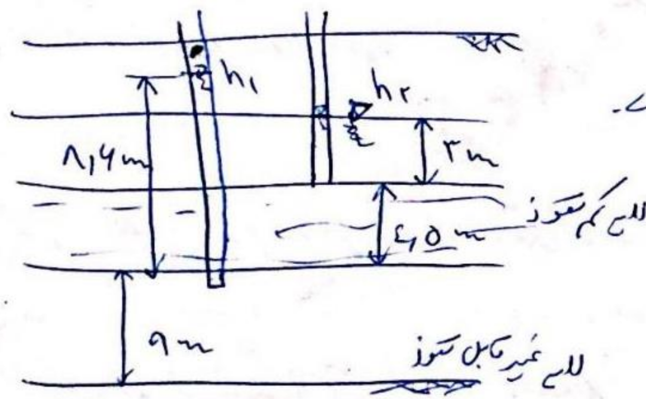


$h = 500 - 25 = 475\ m$ بار هیدرولیکی (فاصله سطح آب تا سطح مبنا)

بار فشار $\frac{P}{\gamma} = h - z = 475 - (500 - 75) = 50\ m$

فشار در ته پیزومتر $P = \gamma (h - z) = 9810\ \frac{N}{m^3} \times 50 = 4.9 \times 10^5\ \frac{kg}{ms^2} = 4.9 \times 10^5\ Pa$

مثال) در شکل زیر دو پیزومتر در آبخوان داده شده است. انتهای یکی تا کف آبخوان باز و انتهای دیگری در آبخوان بسته تراز سطح قرار دارد. هدایت هیدرولیکی لایه بین دو آبخوان $8 \times 10^{-5}\ cm/s$ است. با فرض برقراری جریان پایدار مقدار آبدهی (q) از میان لایه بین دو آبخوان را در واحد سطح محاسبه نمایید.



با توجه به بار هیدرولیکی در دو پیزومتر جهت جریان رو به بالا است.

$$q = -K \frac{\Delta h}{\Delta l} = -K \frac{h_2 - h_1}{b}$$

$$h_1 = 8.6 + 9 = 17.6\ m$$

$$h_2 = 3 + 4.5 + 9 = 16.5\ m$$

$$q = -(8 \times 10^{-7}\ m/s)\left(\frac{16.5 - 17.6}{4.5}\right) = 1.96 \times 10^{-7}\ m/s$$

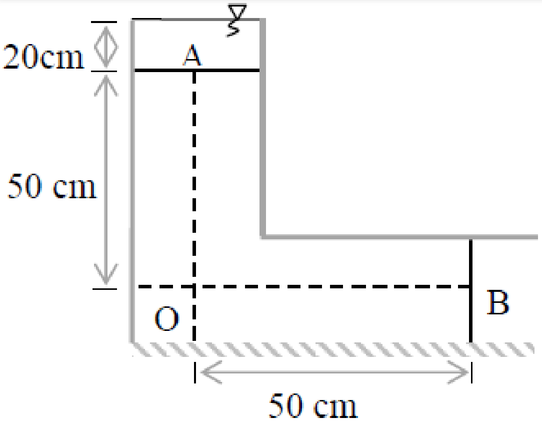
مثال) هدایت هیدرولیکی مواد محیط متخلخلی برای جریان آب برابر با ۰/۰۰۰۵ سانتیمتر در ثانیه اندازه گیری شده است. جرم مخصوص آب یک گرم بر سانتیمتر متر مکعب و لزجت آن یک سانتی پواز است. نفوذپذیری ذاتی مواد محیط متخلخل و هدایت هیدرولیکی برای جریان نفت با جرم مخصوص ۰/۷۵ گرم بر سانتیمتر مکعب و لزجت ۱/۸ سانتی پواز در آن محیط را محاسبه نمائید.

$$1centipoise = 0.01\,poise = 0.01\,\frac{dyne - sec}{cm^2} = 0.01\,\frac{gr}{(cm)(sec)}$$

$$k = \frac{\mu K}{\gamma} = \frac{\left(0.01\,\frac{gr}{(cm)(sec)}\right)}{\left(1\,\frac{gr}{cm^3}\right) \times \left(980\,\frac{cm}{s^2}\right)} \times (0.0005\,cm/s) = 5.1 \times 10^{-9} cm^2$$

با توجه به اینکه نفوذپذیری ذاتی مشخصه محیط است و مقدار آن با نوع سیال تغییر نمی کند، لذا هدایت هیدرولیکی نفت برابر با:

$$K_{oil} = \frac{\rho_{oil} \times g \times k}{\mu_{oil}} = \frac{\left(0.75\,\frac{gr}{cm^3}\right) \times \left(980\,\frac{cm}{s^2}\right)(5.1 \times 10^{-9} cm^2)}{0.018\,\frac{dyne - sec}{cm^2}} = 2.08 \times 10^{-4}\,cm/s$$



مثال) در شکل مقابل اگر هدایت هیدرولیکی یک متر در روز و قطر استوانه ۱۰ سانتیمتر باشد، مقدار دبی جریان و پتانسیل فشاری در نقطه O را محاسبه نمائید (سطح آب ثابت و محیط اشباع است).

حل:

در نقطه A پتانسیل فشاری ۰/۲ و پتانسیل ثقلی ۰/۵ متر است (OBسطح مرجع است). بنابراین پتانسیل هیدرولیکی در این نقطه ۰/۷ متر است. در نقطه B پتانسیل های فشاری و ثقلی صفر و بنابراین پتانسیل هیدرولیکی در این نقطه نیز صفر است. پس می توان گرادیان هیدرولیکی را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$i = \frac{H_A - H_B}{AB} = \frac{0.7-0}{0.5+0.5} = 0.7$$

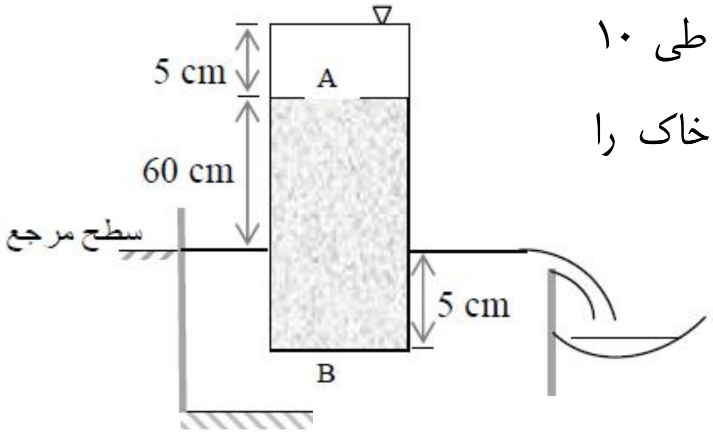
$$A = \pi r^2 = 3.14 \times 0.05^2 = 0.00785 m^2$$

$$Q = KiA = 1 \times 0.7 \times 0.00785 = 0.005495 m^3/day = 5.5 lit/day$$

برای محاسبه پتانسیل فشاری درنقطه O به صورت زیر عمل می شود:

$$i = \frac{H_A - H_O}{AO} \to 0.7 = \frac{0.7 - H_O}{0.5} \to H_O = 35cm$$

چون پتانسیل ثقلی در نقطه O صفر است بنابراین پتانسیل فشاری این نقطه ۳۵ سانتی متر می باشد.



مثال) در شکل مقابل ستون خاک اشباع است و سطح آب ثابت می باشد. در طی ۱۰ دقیقه، ۵۰ سانتیمتر مکعب آب در ظرف جمع می شود. هدایت هیدرولیکی خاک را محاسبه نمائید(قطر استوانه خاک ۲۰ سانتیمتر است).

حل:

در نقطه A پتانسیل فشاری ۵ و پتانسیل ثقلی ۶۰ سانتی متر است. (سطح آب، سطح مرجع است) بنابراین پتانسیل هیدرولیکی در این نقطه ۶۵ سانتی متر است. در نقطه B پتانسیل فشاری ۵ و پتانسیل ثقلی ۵- سانتیمتر می باشد. بنابراین پتانسیل هیدرولیکی در این نقطه صفر است. پس می توان گرادیان هیدرولیکی را به صورت زیر محاسبه نمود:

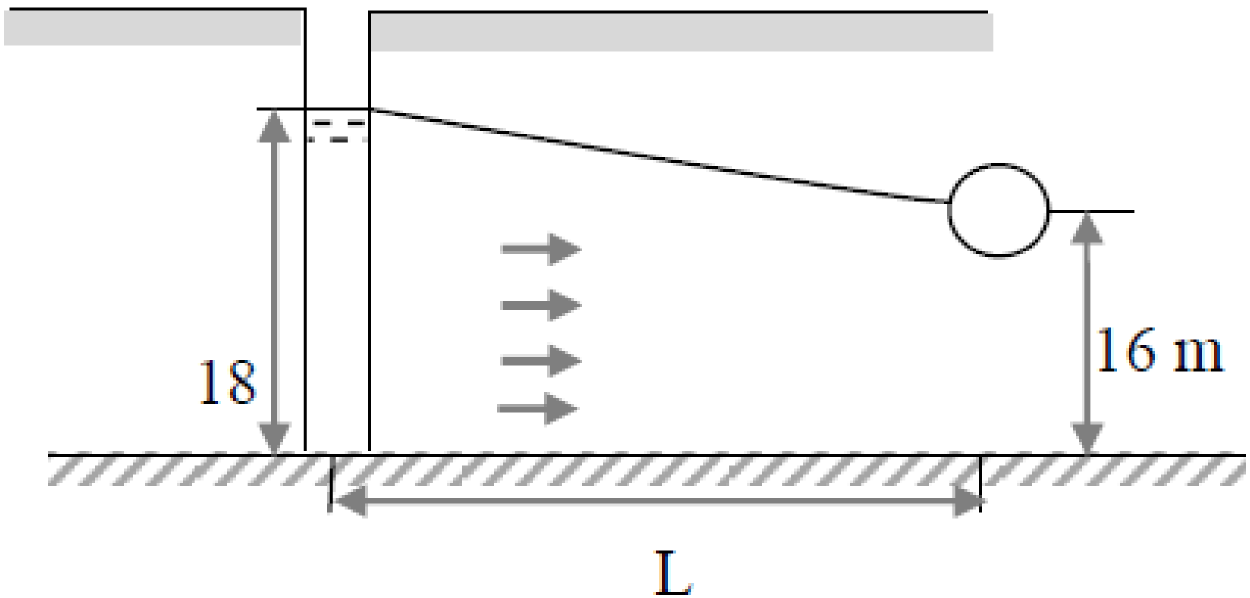
$$i = \frac{H_A - H_B}{AB} = \frac{65-0}{65} = 1$$

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times 10^2 = 314 cm^2$$

$$Q = \frac{V_w}{t} = \frac{50}{10} = 5 cm^3 / \min$$

$$Q = KiA \rightarrow K = \frac{Q}{Ai} = \frac{5}{314 \times 1} = 0.0159 cm / \min$$

مثال) در شکل زیر فاصله تونل تا نهر چقدر باشد تا جریان ماندگاری با شدت ۰/۰۰۰۱ متر مکعب در ثانیه در واحد طول، از نهر به سمت تونل برقرار شود. $(K = 2.65 \times 10^{-4}\ m/s)$



حل:

$$Q = KiA \rightarrow 0.0001 = 2.65\times10^{-4}\times\left(\frac{18-16}{L}\right)\left(\frac{18+16}{2}\times1\right)\rightarrow L = 90m$$

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی-فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

معادلات عمومی جریان

مطالعه حرکت آب در زیرزمین و کاربردهای آن از مهمترین جنبه های هیدرولوژی آب های زیرزمینی است. در این مورد معمولاً جریان آب در دو حالت در نظر گرفته می شود:

- حالت تعادلی (equilibrium) یا ماندگار (steady): در این حالت فرض می شود که سطح ایستابی در لایه های آبدار آزاد یا سطح فشار در لایه های محصور در وضعیت خود ثابت مانده و نسبت به زمان تغییر نمی کند. به عبارت دیگر مقدار جریان ورودی و خروجی به یک منطقه با یکدیگر برابرند.
- حالت غیرتعادلی (non-equilibrium) یا غیرماندگار (unsteady): در حالت غیرماندگار، سطح ایستابی یا سطح فشار در طی جریان آب نسبت به زمان متغیر در نظر گرفته شده و مقادیر جریان ورودی و خروجی معادل نیستند.

مسلماً حالت غیرماندگار بیشتر با واقعیت مطابق می باشد اما حل مسائل مربوط به جریان در حالت ماندگار به مراتب ساده تر از حالت غیرماندگار است.

معادلات اساسی در حل مسائل آبهای زیرزمینی: معادله دارسی، معادله پیوستگی، معادله جریان و معادله بقاء جرم

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

این معادلات در لایه های محصور و غیرمحصور به صورت متفاوت مورد استفاده قرار می گیرند چون در توصیف این معادلات از **ضرایب هیدرودینامیک** و دیگر مشخصه های لایه های آبدار مانند **ضرایب K یا Tدر معادله دارسی** و یا **ضریب ذخیره S در معادله بقاء جرم** استفاده می شود. لذا حل همزمان این معادله ها می تواند منجر به محاسبه ضرایب هیدرودینامیک و در نهایت شناخت لایه های آبدار گردد.

با استفاده از معادلات اساسی جریان و کاربرد آنها در حرکت آب زیرزمینی برای یک لایه آبدار غیرهمگن و غیرهمروند (غیرهمسان) که در آن ضریب هدایت هیدرولیکی در جهات مختلف متفاوت باشد (K_x، K_y و K_z)، تغییرات بار فشار (h) به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=S_s\frac{\partial h}{\partial t}+W$$

که اگر آبخوان همسان و جریان پایدار فرض شود، در این صورت $K_x=K_y=K_z$ بوده و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0\ \Rightarrow \nabla^2 h=0$$

این معادله، که یک معادله دیفرانسیلی درجه ۲ است، بنام معادله لاپلاس معروف است. در این معادله تغییرات بار فشار در تمامی جهات لحاظ شده و این تغییرات نسبت به زمان ثابت فرض شده اند.

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

در حالتی که آبخوان غیرهمسان و غیرهمگن بوده و جریان در وضعیت غیرماندگار در نظر گرفته شود، بار فشار نه تنها در جهات مختلف بلکه نسبت به زمان نیز تغییر می کند. در این صورت رابطه زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

$$K_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+K_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=S_s\frac{\partial h}{\partial t}+W$$

S_s: ضریب ذخیره ویژه آبخوان و W: جریان خروجی یا ورودی به آبخوان

اگر آبخوان همسان باشد، در این صورت، $K_x=K_y=K_z=K$ بوده و هدایت هیدرولیکی در تمام جهات یکسان است. لذا رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

$$K\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+K\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=S_s\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\frac{S_s}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

با توجه به اینکه، ضریب ذخیره ویژه آبخوان برابر با $S_s=\frac{S}{b}$ است، لذا:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\frac{S}{bK}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

در معادله فوق که یک معادله دیفرانسیلی جزئی درجه ۲ می باشد، اگر آبخوان محصور باشد، S ضریب ذخیره و اگر آبخوان آزاد باشد، بجای S باید آبدهی مخصوص (S_y) را قرار داد. بسیاری از مسائل مربوط به آب های زیرزمینی در گرو حل معادله فوق است. با حل معادله لاپلاس بسیاری از خصوصیات جریان آب زیرزمینی قابل تفسیر می باشد.

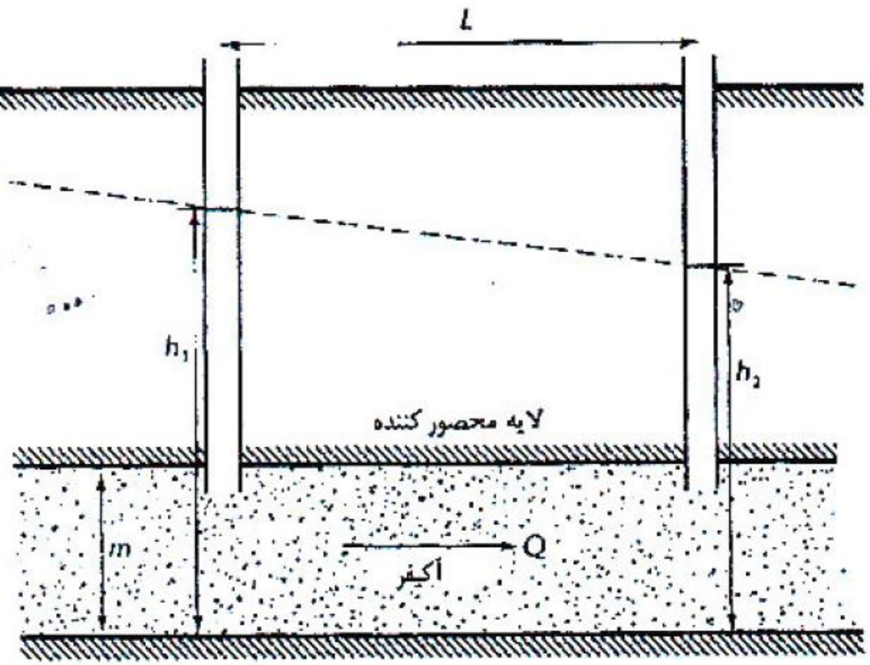
معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

با در نظر گرفتن مسائلی که حرکت آبهای زیرزمینی بوجود می آورد، ایجاب می کند که هر متخصص هیدروژئولوژی آشنایی نسبی با قوانین هیدرولیکی حاکم بر جریان آب زیرزمینی پیدا کند تا بتواند این موضوعات مربوطه را بررسی و از آن نتیجه گیری نماید .

مطالعه دقیق خصوصیات هیدرولیکی جریان های زیرزمینی پیچیده و وقت گیر است. بنابراین به لحاظ کاربردی، اعمال برخی فرضیات بدون این که از دقت عمل بکاهد، محاسبات را ساده تر می سازد. بر این اساس در این بخش فرض خواهیم کرد که لایه آبدار از مواد همگن و همسان تشکیل شده باشد.

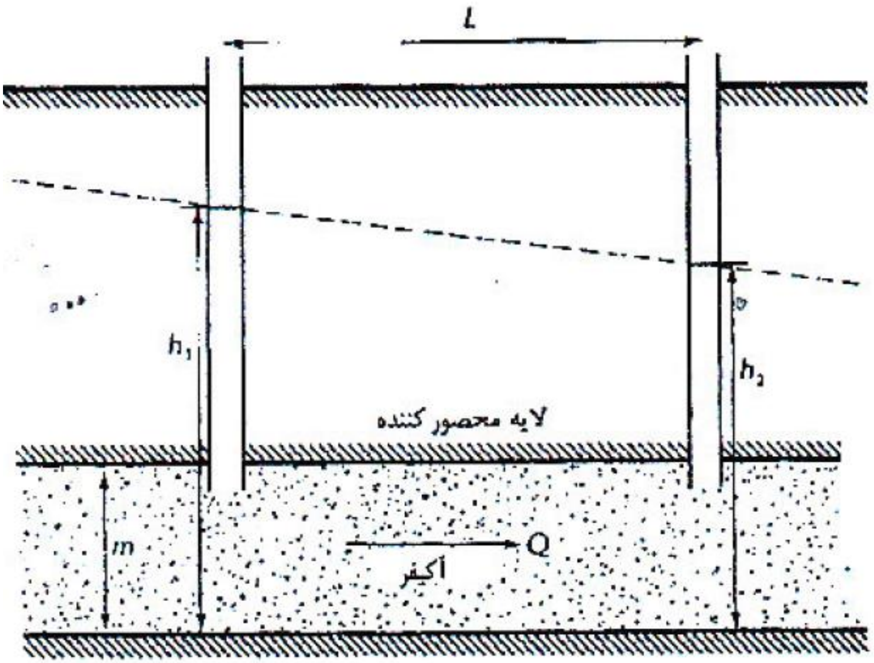
جریان افقی در لایه های محصور در حالت ماندگار

اگر در یک لایه تحت فشار جریانی به صورت ماندگار وجود داشته باشد، شیب هیدرولیکی در امتداد مسیر حرکت برقرار خواهد بود و حرکت به سمتی است که شیب هیدرولیکی کاهش پیدا می کند. در این حالت می توان قانون دارسی را مستقیماً به کار برد.



معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

مطابق شکل زیر، مقطعی از یک لایه تحت فشار که در آن دو چاه با فاصله L از یکدیگر حفر شده اند نشان داده شده است. سطح فشار دارای شیبی است که تصویر آن در شکل به صورت خط مستقیم مشاهده می شود. بار هیدرولیکی در محل چاه اول h_1 و در چاه دوم h_2 است. با توجه به این که گرادیان هیدرولیکی $\frac{dh}{dl}$ می باشد لذا مقدار دبی که از مقطع لایه آبدار به ضخامت m و عرض واحد عبور می کند برابر است با:



$$q = -KA\frac{dh}{dl} = -K(m \times 1)\frac{dh}{dl}$$

$$dh = -q\frac{dl}{(m \times K)} \Rightarrow$$

$$\int_{h_1}^{h_2} dh = -\int_0^L q\frac{dl}{(m \times K)}$$

$$(h_2 - h_1) = -\frac{q}{Km}L \Rightarrow q = (h_1 - h_2)\frac{Km}{L}$$

لذا اگر بخواهیم بار هیدرولیکی را در فاصله ای برابر x از چاه اول به دست آوریم:

$$h = h_1 - \frac{q}{Km}x$$

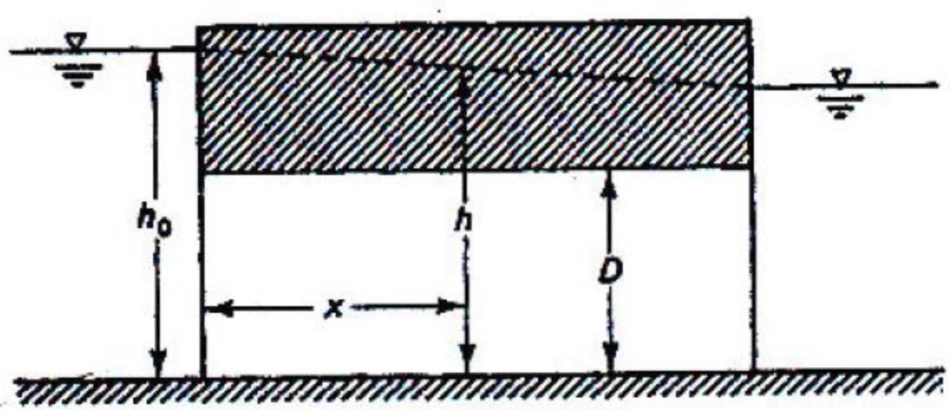
بنابراین از روابط فوق می توان مقادیر K یا h را در لایه آبدار بدست آورد. علامت منفی به این دلیل است که با پیشروی جریان به سمت جلو پتانسیل هیدرولیکی کاهش می یابد.

حال وضعیت دیگری را مطابق شکل زیر در نظر می گیریم که در آن جریان زیرزمینی بین دو توده آب از داخل یک لایه محصور عبور می کند. بر اساس رابطه جریان یک بعدی حاکم بر این محیط آبدار، می توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow h = C_1 x + C_2$$

در این معادله h تراز سطح آب زیرزمینی نسبت به سطح مبنا و C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری می‌باشند. با فرض اینکه در $x = 0$، $h = h_0$ باشد،

$$h_0 = C_1(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = h_0$$



بر اساس قانون دارسی مقدار دبی که از این لایه عبور می کند، عبارت است از:

$$q = -K(D \times 1)\frac{dh}{dx}$$

$$h = C_1 x + C_2 \Rightarrow \frac{dh}{dx} = C_1$$

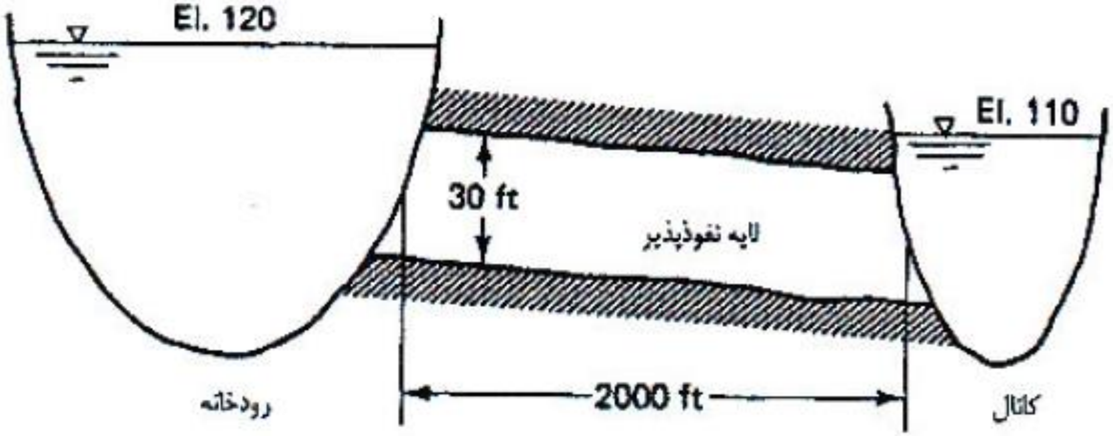
$$q = -K(D \times 1)\ C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{K(D\times 1)}$$

بنابراین رابطه کلی حاکم بر این آبخوان:

$$h = h_0 - \frac{q}{K(D \times 1)}x$$

این رابطه با رابطه قبلی بدست آمده از دارسی یکسان است.

مثال) یک کانال به موازات رودخانه ای احداث شده است. تراز سطح آب رودخانه ۱۲۰ و تراز آب در کانال ۱۱۰ فوت است. فاصله رودخانه و کانال ۲۰۰۰ فوت می باشد و بین آن ها یک لایه محصور به ضخامت ۳۰ فوت که هدایت هیدرولیکی آن ۰/۲۵ فوت در ساعت است، قرار گرفته است. مقدار نشت آب از رودخانه به کانال را که از داخل این لایه صورت می گیرد، محاسبه نمائید.



$$K = 0.25\ ft/hr = 6\,ft/day$$

برای هر فوت از طول کانال می توان رابطه زیر را ارائه نمود:

$$h = h_0 - \frac{q}{K(D \times 1)}x$$

$$110 = 120 - \frac{q}{(6\,ft/day)(30\,ft)}(2000\,ft) \Rightarrow \mathrm{q} = 0.9\ ft^2/day$$

مثال) ضخامت یک لایه آبدار تحت فشار ۳۳ متر و عرض (b) آن ۷ کیلومتر است. دو چاه مشاهده ای به فاصله ۱/۲ کیلومتر از یکدیگر در جهت جریان حفر شده اند. هر دو چاه تا لایه غیر قابل نفوذ و افقی زیرین حفر شده اند. بار هیدرولیکی در چاه اول ۹۷/۵ متر و در چاه دوم ۸۹ متر است. اگر ضریب نفوذ پذیری مواد آبخوان ۱/۲ متر در روز باشد، جریان روزانه آب از لایه به چه میزان خواهد بود. ارتفاع پیزومتریک در نقطه ای به فاصله ۰/۳ کیلومتر از چاه اول چقدر است؟

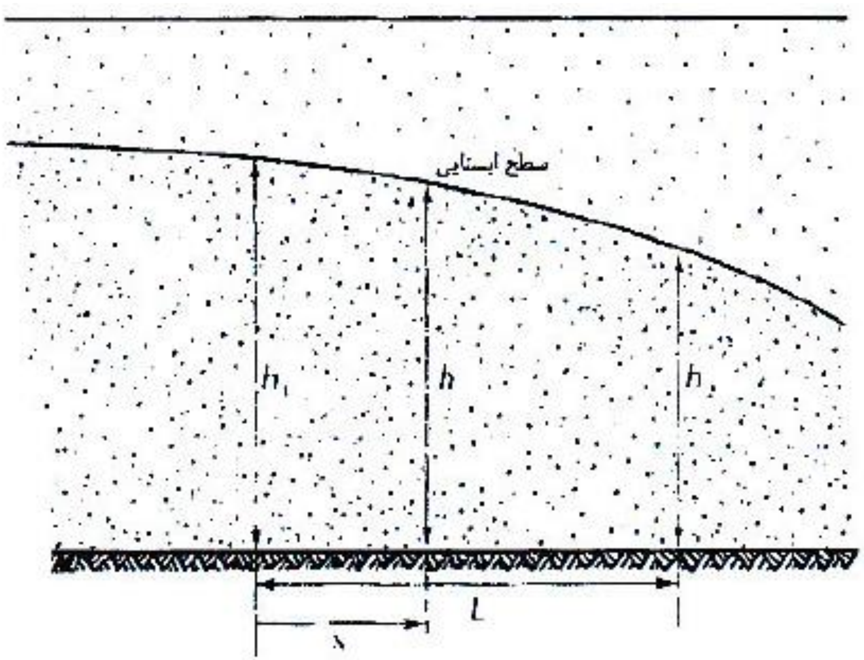
$$Q = -Km\frac{dh}{dl} \times b = -1.2 \times 33 \times \frac{97.5 - 89}{1200} \times 7000 = 1963.5\, m^3/day$$

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{1963.5\, m^3/day}{7000\, m} = 0.2805\, m^2/day$$

$$h = 97.5 - \frac{0.2805}{1.2(33)}(300) = 95.375\, m$$

جریان افقی در لایه های آزاد در حالت ماندگار

در لایه های غیر محصور (آزاد)، سطح ایستابی مرز بالایی منطقه جریان را تشکیل می دهد. مطابق شکل زیر، اگر ارتفاع آب در مقطع اول h_1 و در مقطع دوم h_2 باشد، با فرض این که هیچ گونه آبی در اثر تبخیر یا تعرق تلف نشود، مقدار دبی که از مقطع اول عبور می کند برابر مقدار دبی است که از مقطع دوم می گذرد. مشاهده می شود که در این حالت سطح ایستابی یک خط مستقیم نیست، یعنی شیب هیدرولیکی در تمام نقاط عدد ثابتی نمی باشد. لذا خطوط جریان نیز افقی نخواهد بود. این امر باعث پیچیده شدن هیدرولیک جریان می شود. ولی اگر فرض شود که جریان در امتداد خطوط افقی صورت گرفته و شیب هیدرولیکی برای تمامی نقاط جریان از شیب سطح ایستابی در بالای همان نقطه پیروی کند، می توان قانون دارسی را در این مورد نیز به صورت زیر به کار برد:



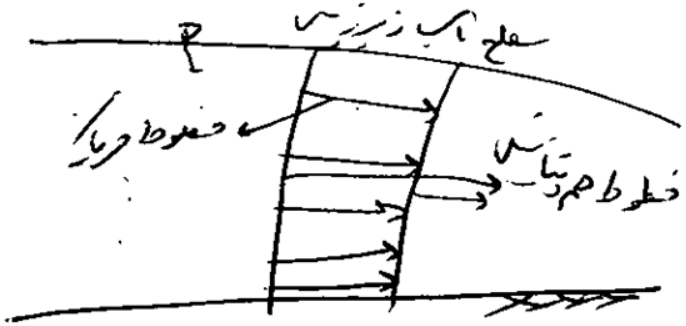
$$q = -KA\frac{dh}{dx}$$

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

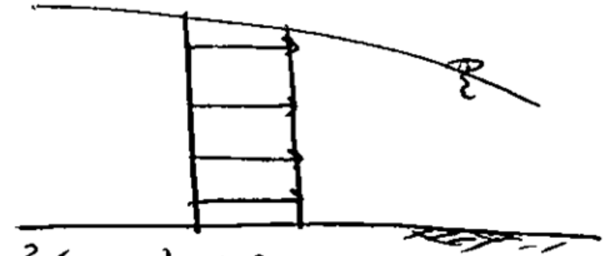
برای حالت جریان مشابه در یک آبخوان آزاد، حل تحلیلی مستقیم برای معادله حاکم ممکن نمی‌باشد. در این حالت استخراج خط جریان بر اساس تراز سطح آب زیرزمینی برای یک جریان دو بعدی مشکل می‌باشد. جهت ارائه راه‌حلی برای معادله حاکم بر این حالت، دوپویی (Dupuit) فرضیات زیر را در نظر گرفت:

- شیب هیدرولیکی با شیب سطح آب زیرزمینی برابر است و با عمق تغییر نمی کند.
- جریان در سراسر مقطع عمودی آبخوان بصورت افقی و یکنواخت می‌باشد.

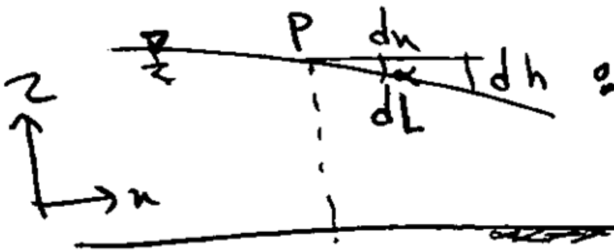
این فرضیات اگر چه منجر به ارائه راه‌حلی می‌گردد اما کاربرد نتایج حاصله را محدود می‌نماید.



شرایط حقیقی (الف)



شرایط فرض شده (ب)



شیب سطح آب زیرزمینی در نقطه P = $\frac{dh}{dx} = \tan(\alpha)$ شیب فرض شده

شیب مسیر جریان در نقطه P = $\frac{dh}{dL} = \sin(\alpha)$

بر اساس فرضیات فوق:

$$\frac{dh}{dx} \simeq \frac{dh}{dL} \Rightarrow \tan(\alpha) = \sin(\alpha)$$

رابطه فوق زمانی می‌تواند برقرار باشد که $dx \simeq dL$ باشد یعنی شیب سطح آب زیرزمینی یا α خیلی کوچک باشد.

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 << 1 \qquad \text{(Bear, 1972)}$$

این شرط بدین معنی است که در امتداد قائم در اکثر نواحی جریان افقی، توزیع فشار هیدرواستاتیک و شیب سطح آب زیرزمینی خیلی کوچک می‌باشد.

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

برای سطح مقطعی به عرض واحد و ارتفاع h که به صورت دلخواه بین دو مقطع h_0 و h_1 در نظر گرفته می شود، سطح مقطع جریان برابر خواهد بود با: $A = h \times 1$

$$q = -Kh\frac{dh}{dx}$$

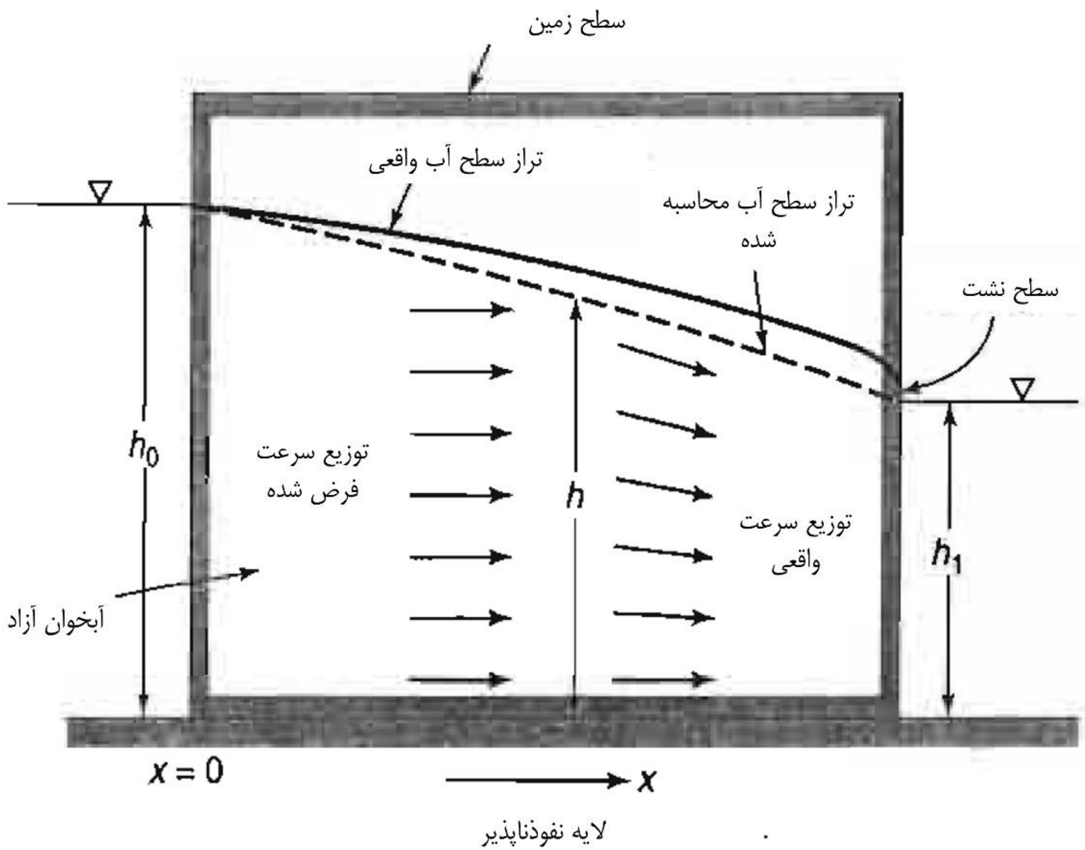
در این رابطه K هدایت هیدرولیکی و h ارتفاع سطح آب در بالای یک بستر نفوذناپذیر و x جهت جریان می‌باشد. با انتگرال‌گیری از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$qx = -\frac{K}{2}h^2 + C$$

با توجه به اینکه در $x = 0$، $h = h_0$ می‌باشد لذا معادله دوپوئی بصورت رابطه زیر ارائه می‌گردد:

$$q = \frac{K}{2x}(h_0^2 - h^2)$$

بر اساس این رابطه می‌توان دریافت که شکل تراز سطح آب بصورت سهمی می‌باشد.

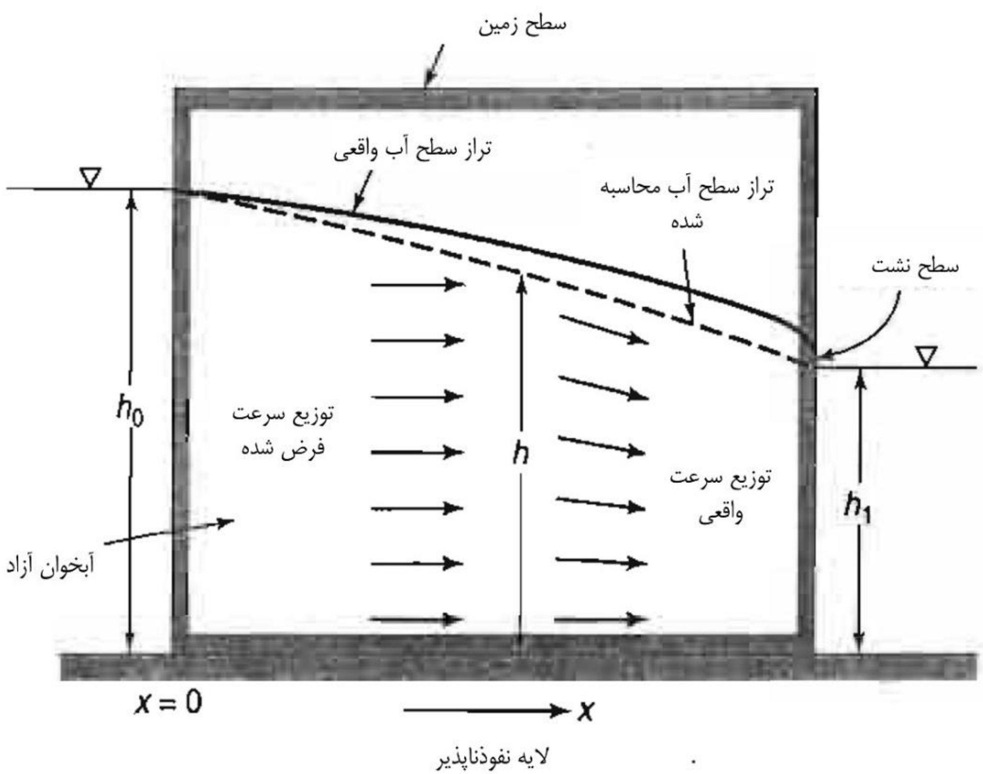


معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

در صورتی که جریان بین دو مرز با بار آبی ثابت h_0 و h_1 برقرار باشد، شیب سطح آب زیرزمینی در مرز بالایی آبخوان، با فرض ناچیز بودن منطقه مؤینگی، به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{q}{Kh_0}$$

در شرایط مرزی، $h = h_0$ به عنوان یک خط هم‌پتانسیل در نظر گرفته می‌شود و مقدار آن ثابت است. بنابراین در این مرز، تراز سطح آب به صورت افقی می‌باشد که در این حالت نمی‌توان از معادله $q = \frac{K}{2x}(h_0^2 - h^2)$ استفاده نمود. در جهت جریان آب زیرزمینی، شیب تراز سهموی سطح آب که با استفاده از این معادله بیان می‌شود، افزایش می‌یابد. این معادله که بر اساس فرضیات دوپویی بنا شده است، مقدار تراز را به صورت تقریبی ارائه می‌دهد و این مقدار محاسبه شده از مقدار واقعی تراز سطح آب زیرزمینی دارای انحراف زیادی می‌باشد.



در شرایط واقعی، سرعت جریان دارای مؤلفه عمودی بوده و برای یک دبی جریان یکسان نیاز به ضخامت اشباع بیشتری می‌باشد. در مرز پایین‌دست یک ناپیوستگی در تراز سطح آب در هنگام اتصال به مرز آبی وجود دارد که این امر به دلیل ناسازگاری الگوی جریان می‌باشد. تراز سطح آب زیرزمینی واقعی در این مرز کمی بالاتر از تراز آبی واقع در مرز بوده و در نتیجه این امر سطحی که در بالای تراز محاسباتی شکل می‌گیرد به عنوان سطح تراوش (Seepage face) در نظر گرفته می‌شود.

ضریب نفوذ پذیری در یک لایه آبدار غیر محصور ۰/۰۰۲ سانتی متر در ثانیه و تخلخل مواد آن ۰/۲۷ است. آبخوان در بستری از شن به فاصله ۳۱ متر از سطح زمین واقع می باشد. دو چاه به فاصله ۱۷۵ متر از یکدیگر در امتداد جریان حفر شده است. سطح ایستابی در چاه اول و دوم به ترتیب ۲۱ متر و ۲۳/۵ متر زیر سطح زمین قرار گرفته است. موارد ذیل را مورد محاسبه قرار دهید: الف) مقدار دبی را در هر واحد عرض آبخوان ب) سرعت منفذی را در محل چاه اول

الف)

$$h_0 = 31 - 21 = 10\,m \quad , \qquad h = 31 - 23.5 = 7.5\,m \quad , \qquad K = 0.002\ cm/s = 1.7\ m/day$$

$$q = \frac{K}{2L}(h_0^2 - h^2) = \frac{1.7}{2(175)}(10^2 - 7.5^2) = 0.21\ m^3/day$$

ب)

$$V = \frac{q}{\mathrm{nA}} = \frac{0.21}{0.27(10 \times 1)} = 0.078\ m/day$$

معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی-فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

چنانچه از رابطه حاکم بر جریان در محیط های متخلخل استفاده شود، معادله عمومی جریان در آبخوان باز به صورت زیر خواهد شد:

معادله بوسینسک (دوپوئی-فورشهایمر)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + W \\ S_s = \frac{S}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(T_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + W$$

$$T_x = K_x h \quad , T_y = K_y h \quad , T_z = K_z h$$

اگر جریان یک بعدی، همگن و همسان باشد، رابطه فوق به صورت زیر خلاصه خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0$$

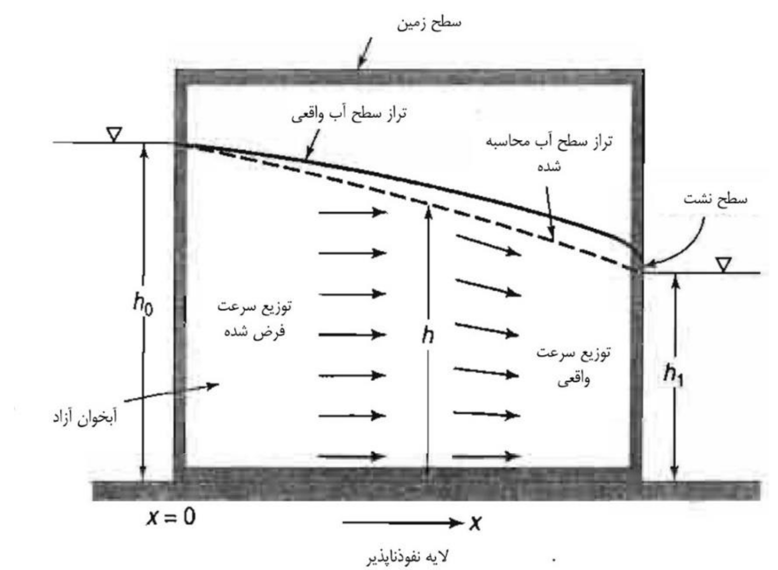
با دوبار انتگرال گیری از رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$h^2 = C_1 x + C_2$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{cases} in\ x = 0 \Rightarrow h = h_0 \\ in\ x = L \Rightarrow h = h_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = h_0^2 \\ C_1 = \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{L} \end{cases}$$

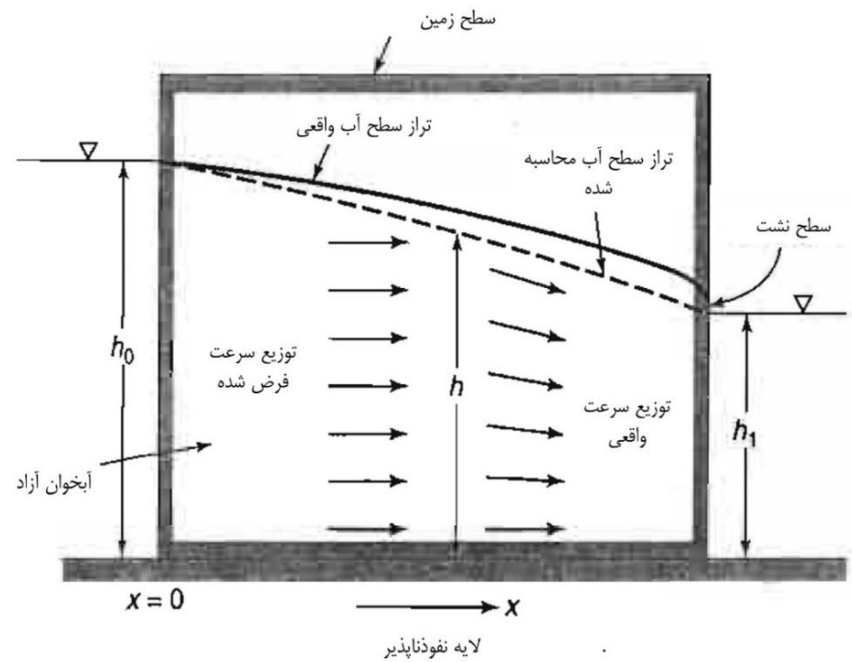
$$h^2 = \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{L} x + h_0^2$$



معادله عمومی جریان آب های زیرزمینی (فرضیات دوپوئی–فورشایهمر و کاربرد آن در جریان در آبخوان های آزاد)

رابطه فوق، معادله یک سهمی است که شکل سطح آب زیرزمینی را بیان می کند.

$$h^2 = \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{L} x + h_0^2$$



برای محاسبه میزان دبی عبوری در واحد عرض، از رابطه دارسی استفاده می شود:

$$q = -Kh\frac{dh}{dx}$$

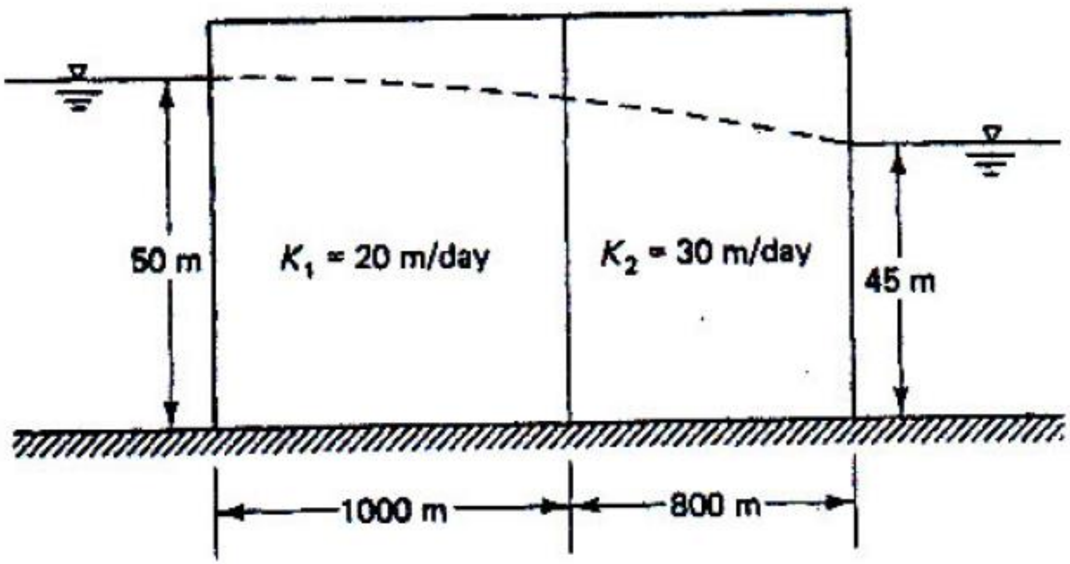
چنانچه از رابطه حاکم بر جریان در آبخوان آزاد (رابطه ابتدای صفحه)، مشتق گرفته شود:

$$h\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{2L}$$

$$q = K\frac{(h_0^2 - h_1^2)}{2L}$$

این رابطه با رابطه $q = \frac{K}{2x}(h_0^2 - h^2)$ (که بر مبنای دارسی بدست آمده است) یکسان است.

مثال) با توجه به شکل زیر مقدار جریان آب را که از داخل توده متخلخل عبور می کند را محاسبه نمائید. توجه شود که این توده از دو قسمت با هدایت هیدرولیکی مختلف تشکیل شده است.

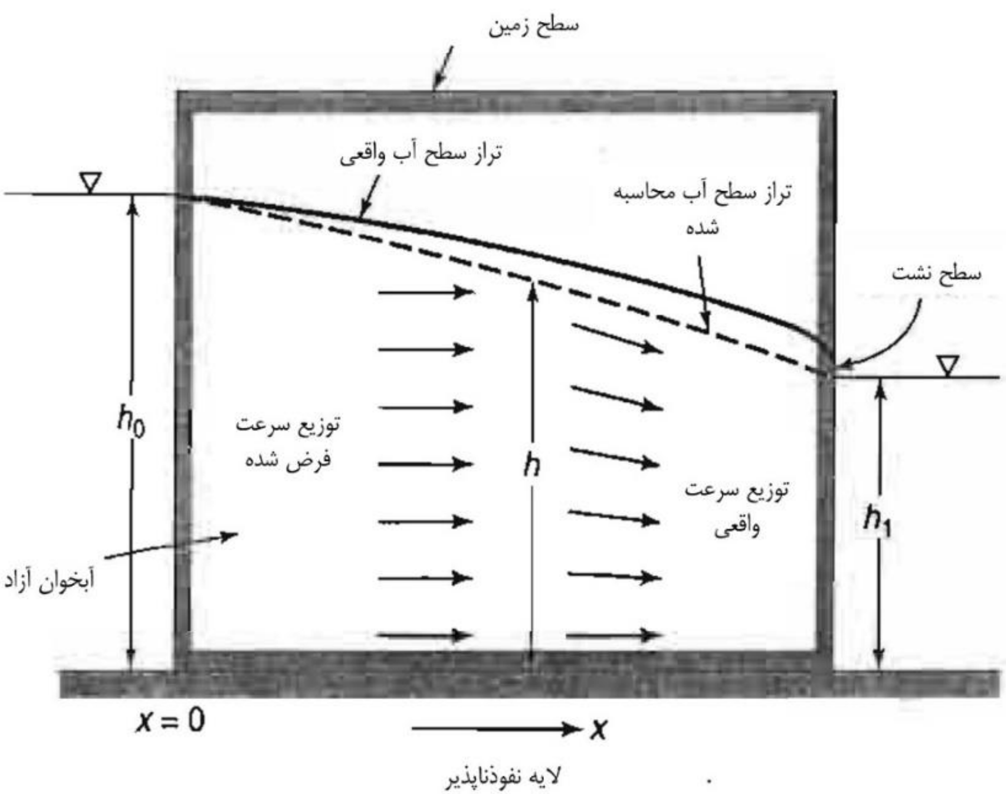


حل) با توجه به اینکه جریان به صورت عمود بر ضخامت لایه اشباع وارد می شود، لذا از متوسط همساز برای محاسبه هدایت هیدرولیکی متوسط استفاده می شود:

$$\overline{K} = \frac{b}{\frac{b_1}{K_1} + \frac{b_2}{K_2}} = \frac{1000 + 800}{\frac{1000}{20} + \frac{800}{30}} = 23.48\ m/day$$

$$q = K\frac{(h_0^2 - h_1^2)}{2L} = 23.48 \times \frac{(50^2 - 45^2)}{2 \times 1800} = 3.09\ m^2/day$$

مثال) مطابق شکل زیر، هدایت هیدرولیکی آبخوان ۰/۰۰۲ متر بر ثانیه، مقدار بار هیدرولیکی در h_0 و h_1 به ترتیب برابر با ۱۰ و ۷/۵ متر است. اگر فاصله بین دو نهر ۱۵۰ متر باشد، دبی جریان را در یک متر طول کانال و نیز بار هیدرولیکی را در وسط فاصله بین دو کانال تعیین نمائید.



$$q = K\frac{(h_0^2 - h_1^2)}{2L}$$

$$= 0.002 \times \frac{(10^2 - 7.5^2)}{2 \times 150} = 2.92\ m^2/s$$

$$h^2 = \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{L}x + h_0^2$$

$$= \frac{(7.5^2 - 10^2)}{150} \times 75 + 10^2$$

$$= 8.84\ m$$